

Quiz-3

Algorithm Design - Spring 2026

Instructor: Dr. Amin Eskandari

Head Teaching Assistants: Hamid Namjoo, Amir Hossein Hemati

Teaching Assistants: Ali Nikvan, Viyana Hasanbeigi, Nima Soltani, Reza Rezaie, Maryam

Meidanshahi , Babak Janfaza , Elham Mosavi

سوال 1 :

یک شرکت فناوری در حال طراحی یک سیستم جدید برای انتقال داده‌ها از یک مرکز تحقیقاتی به سرور مرکزی است. حجم داده‌ها بسیار زیاد است و پهنای باند شبکه محدود می‌باشد، بنابراین مهندسان سیستم تصمیم می‌گیرند فرآیند انتقال را در چند مرحله بهینه کنند. در مرحله اول باید از میان تعداد زیادی فایل تحقیقاتی، تعدادی برای ارسال انتخاب شوند. هر فایل دارای دو ویژگی است:

- اندازه فایل (weight) که نشان می‌دهد چه مقدار از ظرفیت کانال را اشغال می‌کند.
 - اهمیت فایل (value) که میزان ارزش اطلاعاتی آن برای سرور مرکزی را نشان می‌دهد.
- پس از انتخاب فایل‌ها، سیستم قبل از ارسال داده‌ها از روش‌های فشرده‌سازی برای کاهش حجم اطلاعات استفاده می‌کند. در نهایت، هنگام پردازش داده‌ها در سرور مقصد، سیستم برای محاسبه برخی هزینه‌های پردازشی از تعاریف بازگشتی استفاده می‌کند که ممکن است شامل محاسبات تکراری باشد.
- مهندسان شرکت از شما که به‌عنوان طراح الگوریتم در تیم حضور دارید می‌خواهند درباره انتخاب روش‌های مناسب برای این مراحل تحلیل ارائه دهید.

الف) فرض کنید در مرحله انتخاب فایل‌ها اجازه داریم بخشی از هر فایل را نیز ارسال کنیم (مشابه مسئله کوله‌پشتی کسری). یکی از مهندسان پیشنهاد می‌کند فایل‌ها بر اساس بیشترین نسبت اهمیت به اندازه (value/weight) مرتب شده و به همین ترتیب انتخاب شوند. توضیح دهید چرا این انتخاب یک استراتژی حریصانه مناسب محسوب می‌شود و چرا می‌تواند به یک جواب بهینه منجر شود. (0.25)

ب) اکنون فرض کنید به دلایل فنی، فایل‌ها قابل تقسیم نیستند و هر فایل باید به‌طور کامل ارسال شود یا اصلاً ارسال نشود. آیا همان استراتژی حریصانه قسمت قبل همیشه جواب بهینه می‌دهد؟ توضیح دهید و به‌صورت مفهومی بیان کنید چرا در این حالت مسئله معمولاً نیازمند روش متفاوتی مانند برنامه‌ریزی پویا است. (0.25)

ج) در مرحله بعد، تیم مهندسی تصمیم می‌گیرد برای کاهش حجم داده‌های ارسالی از الگوریتم فشرده‌سازی هافمن (Huffman Coding) استفاده کند تا کاراکترهایی که بیشتر تکرار می‌شوند با کدهای کوتاه‌تر نمایش داده شوند. توضیح دهید چرا در این الگوریتم، در هر مرحله ادغام دو کاراکتر با کمترین فراوانی یک انتخاب حریصانه صحیح است و چگونه این کار باعث کاهش طول متوسط کدها می‌شود. (0.2)

د) پس از دریافت داده‌ها در سرور مرکزی، سیستم باید برخی هزینه‌های پردازشی را محاسبه کند. یکی از برنامه‌نویسان یک تعریف بازگشتی مشابه دنباله فیبوناچی برای این محاسبه نوشته است، اما تیم متوجه می‌شود که این روش برای ورودی‌های بزرگ بسیار کند می‌شود. (0.3)

1. مفهوم زیرمسئله‌های هم‌پوشان (Overlapping Subproblems) را توضیح دهید.

2. بیان کنید چگونه برنامه‌ریزی پویا (Dynamic Programming) می‌تواند این مشکل را برطرف کند.

سوال 2 :

یک سامانه‌ی پردازش داده باید هم در انتخاب داده‌های مهم برای ذخیره‌سازی عمل کند، هم شباهت بین نسخه‌های مختلف داده را بررسی کند، و هم بین چند گره‌ی پردازشی ارتباط کم‌هزینه برقرار سازد.

الف) چهار بسته‌ی داده برای ذخیره‌سازی در دسترس هستند. وزن و ارزش هر بسته در جدول زیر آمده است:

ارزش وزن بسته

$$P_1 \quad 2 \quad 12$$

$$P_2 \quad 3 \quad 20$$

$$P_3 \quad 4 \quad 24$$

$$P_4 \quad 5 \quad 30$$

ظرفیت حافظه برابر 7 واحد است.

با استفاده از الگوریتم **کوله‌پشتی 1/0** مشخص کنید کدام بسته‌ها باید انتخاب شوند تا مجموع ارزش بیشینه شود.

پاسخ نهایی شامل موارد زیر باشد:

1. بسته‌های انتخاب شده

2. مجموع وزن

3. مجموع ارزش بیشینه

ب) دو رشته‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی دو نسخه از یک داده هستند:

$$X = ACBDAB$$

$$Y = BCADB$$

با استفاده از روش **برنامه‌نویسی پویا**، طول بلندترین زیردنباله‌ی مشترک (LCS) را به دست آورید و یکی از LCS‌های ممکن را بنویسید.

ج) گراف وزن‌دار زیر هزینه‌ی ارتباط بین چهار گره را نشان می‌دهد:

$$A - B = 2 \quad \bullet$$

$$A - C = 3 \quad \bullet$$

$$A - D = 6 \quad \bullet$$

$$B - C = 1 \quad \bullet$$

$$B - D = 4 \quad \bullet$$

$$C - D = 5 \quad \bullet$$

یک درخت پوشای کمینه برای این گراف پیدا کنید و هزینه‌ی کل آن را به دست آورید.

سوال 3 :

1 - در یک شبکه توزیع برق هوشمند، n ایستگاه وجود دارد که با m خط انتقال به هم متصل شده‌اند. هر خط یک هزینه دارد (می‌تواند مثبت، صفر یا منفی باشد). برخی خطوط به دلیل یارانه دولتی هزینه منفی دارند، اما هیچ دور منفی در کل شبکه وجود ندارد. مدیر شبکه می‌خواهد کوتاه‌ترین مسیر از هر ایستگاه به همه ایستگاه‌های دیگر را پیدا کند.

الف) مراحل الگوریتم جانشون را به طور کامل و گام به گام برای حل این مسئله توضیح دهید. حتماً توضیح دهید که چرا اضافه کردن یک رأس مجازی و اجرای الگوریتم بلمن-فورد ضروری است، و چرا تبدیل وزن یال‌ها با استفاده از پتانسیل رأس‌ها، کوتاه‌ترین مسیرهای اصلی را حفظ می‌کند.

ب) فرض کنید می‌خواهیم دیجسترا را با `FibonacciHeap` پیاده‌سازی کنیم. برای کلاس `FibonacciHeap`، کد متدهای زیر را بنویسید (فقط خود متدها، بدون توضیح اضافی):

• `_singleton(key, value)`

• `_merge(a, b)`

• `insert(key, value)`

• `removeMinimum()`

نیازی به نوشتن کلاس کامل نیست، فقط بدنه این چهار متد را با فرض وجود گره‌ها به صورت لیست پیوندی حلقوی دوطرفه بنویسید.

همچنین در یک خط توضیح دهید که متد `removeMinimum` پس از برداشتن گره مینیمم، چه عملی روی درخت‌ها انجام می‌دهد.

ج) تحلیل زمانی الگوریتم جانشون را در دو حالت بنویسید:

• زمانی که دیجسترا با آرایه ساده پیاده‌سازی شود

• زمانی که دیجسترا با فیبوناچی هیپ پیاده‌سازی شود

مرتبه نهایی را بر حسب n و m بنویسید و تفاوت را توضیح دهید.

(د) در کدام شرایط عملی استفاده از فیبوناچی هیپ به جای هیپ دودویی توجیه ندارد؟ مثال بزنید

2 - در یک میدان جنگ، n سنگر با مختصات صحیح (x, y) وجود دارد. فرمانده می‌خواهد ابتدا نزدیک‌ترین جفت سنگر را پیدا کند. سپس بین این دو سنگر، کوتاه‌ترین مسیر را در گرافی پیدا کند که در آن دو سنگر با یک یال به هم متصل هستند اگر و فقط اگر فاصله اقلیدسی بین آنها از یک آستانه مشخص d کمتر باشد. وزن هر یال برابر مربع فاصله اقلیدسی است. تمام وزن‌ها نامنفی هستند.

(الف) الگوریتم تقسیم و حل برای مسئله نزدیک‌ترین زوج نقاط را پیاده‌سازی کنید

(ب) الگوریتم فلوید-وارشال را توضیح دهید و شبه‌کد آن را بنویسید.

۲. مرتبه زمانی این الگوریتم را بنویسید.

(ج) تابعی بنویسید که با استفاده از جستجوی عمق اول (DFS) و عقبگرد (backtracking)، تعداد مسیرهای ساده از رأس s به رأس t با حداکثر طول L را بشمارد. مسیر ساده یعنی هیچ رأسی تکرار نشود.

(د) تحلیل پیچیدگی زمانی این تابع را در بدترین حالت بر حسب n (تعداد رأس‌ها)، d (میانگین درجه) و L بنویسید.

سوال 4 :

یک سامانه امنیتی برای تحلیل ترافیک شبکه طراحی شده این سامانه برای شناسایی الگوهای مخرب و پردازش داده‌ها و تحلیل ظرفیت انتقال امن از الگوریتم‌های مختلف استفاده می‌کند

بخش اول

الگوی حمله:

$P = \text{"ABABACA"}$

رشته ترافیک شبکه:

$T = \text{"ABABABACABABACA"}$

سوال 1)

آرایه LPS را برای الگوی P محاسبه کنید و اجرای الگوریتم KMP را روی رشته T مرحله به مرحله انجام بدین و در هر مرحله موارد زیر را مشخص کنید

موقعیت اندیس در متن و الگو؟

محل mismatch؟؟

نحوه استفاده از LPS برای ادامه جستجو؟؟؟

سوال 2)

فرض کنید اگر سامانه رشته T را به دو بخش مساوی تقسیم کنیم و روی هر بخش عملیات جستجوی الگو را اجرا کنیم رابطه زمانی سیستم به صورت زیر بدست میاد

$$T(n) = 2T(n/2) + n \log n$$

الف) این رابطه را با استفاده از Master Theorem حل کنید

ب) توضیح دهید در چه شرایطی ترکیب روش Divide & Conquer با الگوریتم KMP می تواند باعث کاهش کارایی عملی سیستم شود

بخش دوم

در بخش رمزنگاری سیستم ضرب دو ماتریس $n \times n$ با استفاده از الگوریتم Strassen انجام می شود

سوال 1)

توضیح دهید الگوریتم Strassen چگونه تعداد ضرب های مورد نیاز برای ضرب ماتریس ها را از 8 به 7 کاهش می دهد و سپس رابطه بازگشتی زمان اجرای این الگوریتم را نوشته و پیچیدگی زمانی آن را به دست بیارید

سوال 2)

فرض کنید در یک سخت افزار امنیتی هزینه عملیات جمع ماتریس ها بسیار زیاد شده

الف) بررسی کنید آیا در این شرایط همچنان استفاده از Strassen نسبت به ضرب کلاسیک بهینه است یا نه؟؟

ب) توضیح دهید چرا در برخی اندازه های ورودی ممکن است الگوریتم ضرب ماتریسی معمولی سریع تر از Strassen عمل کند؟

بخش سوم

شبکه انتقال امن داده به صورت یک گراف جریان با ظرفیت های زیر مدل شده

$$S \rightarrow A = 12$$

$$S \rightarrow B = 8$$

$$A \rightarrow B = 5$$

$$A \rightarrow T = 7$$

$$B \rightarrow T = 10$$

سوال 1)

الگوریتم Ford-Fulkerson را برای محاسبه حداکثر جریان از S به T اجرا کنید و مسیرهای افزایشی را مشخص کرده و جریان نهایی شبکه را محاسبه کنید

سوال 2)

فرض کنید کل سامانه شامل سه ماژول زیر هست

جستجوی الگو با KMP

رمزنگاری با Strassen

محاسبه جریان با Ford-Fulkerson

اگر طول داده n ، تعداد رأس ها V و تعداد یال ها E باشد پیچیدگی کلی سیستم را تحلیل کنید و سوالات زیر را جواب بدین

گلوگاه اصلی سیستم کدام بخش است؟؟

در چه شرایطی هزینه اجرای Ford-Fulkerson از بخش Strassen بیشتر خواهد شد؟