

سوال ۱ :

 نوسازی شبکه آبرسانی دانشگاه

در محوطه سرسبز دانشگاه آزاد شیراز، یک سیستم انتقال آب قدیمی وجود دارد که وظیفه آبرسانی به ساختمان‌ها را بر عهده دارد. **دکتر اسکندری**، مدیر تاسیسات دانشگاه، قصد دارد ظرفیت این شبکه را افزایش دهد. **حمید**، مهندس ارشد پروژه، مقدار شاری (جریان آب) که هم‌اکنون در لوله‌ها جریان دارد را اندازه‌گیری کرده است.

حالا نوبت شماست! برای اینکه بفهمیم چقدر ظرفیت خالی برای اضافه کردن جریان آب وجود دارد، باید **گراف باقیمانده (Residual Graph)** این شبکه را ترسیم کنید. این گراف به ما می‌گوید کجاها می‌توان فشار را زیاد کرد (یال رفت) و کجاها می‌توان جریان را به عقب بازگرداند (یال برگشت).

در محوطه سرسبز دانشگاه آزاد شیراز، یک سیستم انتقال آب قدیمی وجود دارد که وظیفه آبرسانی به ساختمان‌ها را بر عهده دارد. **دکتر اسکندری**، مدیر تاسیسات دانشگاه، قصد دارد ظرفیت این شبکه را افزایش دهد. **حمید**، مهندس ارشد پروژه، مقدار شاری (جریان آب) که هم‌اکنون در لوله‌ها جریان دارد را اندازه‌گیری کرده است.

حالا نوبت شماست! برای اینکه بفهمیم چقدر ظرفیت خالی برای اضافه کردن جریان آب وجود دارد، باید **گراف باقیمانده (Residual Graph)** این شبکه را ترسیم کنید. این گراف به ما می‌گوید کجاها می‌توان فشار را زیاد کرد (یال رفت) و کجاها می‌توان جریان را به عقب بازگرداند (یال برگشت).

 مأموریت شما

برنامه‌ای بنویسید که با دریافت ماتریس ظرفیت‌ها و ماتریس شار فعلی، ماتریس گراف باقیمانده را محاسبه کند. طبق اصول شبکه‌های شار:

- **یال رفت (Forward):** پتانسیل عبور جریان بیشتر که از تفاضل ظرفیت و شار به دست می‌آید $(c - f)$.
- **یال برگشت (Backward):** پتانسیل لغو جریان قبلی که برابر با مقدار شار فعلی است. (f) .

ورودی

- خط اول: عدد طبیعی (n تعداد ساختمان‌ها).
- n خط بعدی: ماتریس مجاورت $n * n$ مربوط به ظرفیت کل لوله‌ها. (Capacities)
- n خط نهایی: ماتریس مجاورت $n * n$ مربوط به شار فعلی لوله‌ها. (Current Flows)

خروجی

- یک ماتریس مجاورت $n * n$ که نشان‌دهنده گراف باقیمانده باشد. (در خروجی، هر سطر ماتریس را به صورت یک لیست چاپ کنید).

قوانین مسئله

- مقدار شار هرگز از ظرفیت لوله بیشتر نمی‌شود. ($0 \leq f \leq c$)
- اگر بین دو ساختمان لوله دوطرفه وجود داشته باشد یا یال برگشت بر روی یک یال رفت دیگر بیفتد، مقادیر با هم جمع می‌شوند.

نمونه ورودی و خروجی

ورودی:

2
0 10
0 0
0 4
0 0

خروجی:

[0, 6]

[4, 0]

تخصیص بهینه پروژه‌ها

در مرکز نشر دانشگاه آزاد شیراز، ترافیک کاری شدیدی ایجاد شده است. دکتر اسکندری تعدادی پروژه ویراستاری کتاب دارد و تعدادی دانشجوی داوطلب. اما هر دانشجو فقط در زمینه‌های خاصی تخصص دارد و بر اساس مهارت‌هایش، تنها می‌تواند مسئولیت پروژه‌های خاصی را بپذیرد.

از طرفی، قوانین آموزشی اجازه نمی‌دهد هر دانشجو در هفته بیش از یک پروژه بردارد. همچنین هر پروژه نیز تنها توسط یک ویراستار باید انجام شود. امیر وظیفه پیدا کردن بهترین چیدمان را دارد تا بیشترین تعداد ممکن از پروژه‌ها تعیین تکلیف شوند و هیچ کار روی زمین نماند.

مأموریت شما

برنامه‌ای بنویسید که با دریافت لیست علایق دانشجویان، بیشترین تعداد ممکن از پروژه‌ها را که می‌توان همزمان واگذار کرد، محاسبه کند. این مسئله در واقع پیدا کردن «تطابق بیشینه Maximum» (Matching) در یک گراف دوبخشی است.

ورودی

- خط اول: عدد طبیعی (n تعداد دانشجویان)
- خط دوم: عدد طبیعی (m تعداد پروژه‌ها)
- n خط بعدی: در هر خط، شماره پروژه‌هایی که آن دانشجو توانایی انجام‌شان را دارد با فاصله از هم قرار گرفته‌اند. (اگر دانشجویی توانایی انجام هیچ پروژه‌ای را نداشته باشد، خط مربوط به او خالی یا شامل هیچ عددی نخواهد بود).

خروجی

- یک عدد صحیح که نشان‌دهنده حداکثر تعداد پروژه‌هایی است که می‌توان همزمان واگذار کرد.

قوانین مسئله

- هر دانشجو حداکثر ۱ پروژه.
- هر پروژه حداکثر ۱ دانشجو.
- دانشجویان با شماره‌های ۰ تا $n-1$ و پروژه‌ها با شماره‌های ۰ تا $m-1$ مشخص می‌شوند.

نمونه ورودی و خروجی

ورودی:

3

3

0 1

0

2

خروجی:

3

سوال ۳ :

💰🔗📊 کمترین هزینه جداسازی مبدأ از مقصد در شبکه آبرسانی

پس از نوسازی لوله‌ها، حالا دکتر اسکندری با یک چالش جدید روبرو شده است. برای انجام تعمیرات اساسی در بخش اصلی شبکه، لازم است که ساختمان مبدأ (Source) به طور کامل از ساختمان مقصد (Sink) ایزوله شود؛ به طوری که هیچ قطره آبی نتواند از مبدأ به مقصد برسد.

هر لوله بین ساختمان‌ها یک ظرفیت مشخص دارد که قطع کردن آن، هزینه‌ای معادل همان ظرفیت روی دست دانشگاه می‌گذارد. رضا ماموریت دارد تا ارزان‌ترین راه را برای قطع کردن تمام مسیرهای ارتباطی پیدا کند. او باید مجموع «کمترین هزینه ممکن» برای قطع لوله‌ها را محاسبه کند تا هم تعمیرات انجام شود و هم بودجه دانشگاه هدر نرود.

🎯 مأموریت شما

برنامه‌ای بنویسید که با دریافت ماتریس ظرفیت‌ها و شماره ساختمان‌های مبدأ و مقصد، حداقل هزینه جداسازی را پیدا کند. طبق قضیه مشهور "شار بیشینه - برش کمینه"، حداقل هزینه برای قطع تمامی مسیرها، دقیقاً برابر با مقدار شار بیشینه در آن شبکه است.

ورودی

- خط اول: عدد طبیعی (n تعداد ساختمان‌ها).
 - n خط بعدی: ماتریس مجاورت $n * n$ که ظرفیت لوله‌ها (**capacities**) را نشان می‌دهد.
 - خط بعدی: عدد صحیح (s شماره ساختمان مبدأ)
 - خط آخر: عدد صحیح (t شماره ساختمان مقصد).
-

خروجی

- یک عدد صحیح که نشان‌دهنده حداقل هزینه (مجموع ظرفیت لوله‌های قطع شده) برای قطع ارتباط کامل است.
-

قوانین مسئله

- ساختمان‌ها از 0 تا $n-1$ شماره‌گذاری شده‌اند.
 - هزینه قطع کردن هر یال برابر با ظرفیت آن یال در ماتریس است.
-

نمونه ورودی و خروجی

ورودی:

2
0 10
0 0
0
1

خروجی:

10

پس از نوسازی لوله‌ها و جداسازی شبکه، **دکتر اسکندری** متوجه شده که هنوز در ساعات اوج مصرف، فشار آب در برخی ساختمان‌ها افت می‌کند. او می‌داند که افزایش ظرفیت هر لوله‌ای لزوماً باعث بهتر شدن اوضاع نمی‌شود؛ بلکه باید روی «گلوگاه‌ها» تمرکز کرد.

گلوگاه (Bottleneck) لوله‌ای است که ظرفیتش کاملاً پر شده و اجازه نمی‌دهد آب بیشتری در کل شبکه جریان یابد. اگر فقط کمی ظرفیت این لوله‌های خاص را زیاد کنیم، شار کل شبکه بلافاصله افزایش می‌یابد. مأموریت دارد تا این لوله‌های حساس را شناسایی کند تا بودجه دانشگاه فقط خرج لوله‌هایی شود که واقعاً راه آب را بسته‌اند!

مأموریت شما

برنامه‌ای بنویسید که با دریافت ماتریس ظرفیت‌ها، لیست یال‌های گلوگاه را پیدا کند.

راهنمایی فنی: یک یال (u, v) گلوگاه است اگر پس از محاسبه شار بیشینه، ظرفیت باقیمانده آن در مسیر رفت **صفر** شده باشد و ساختمان u از سمت منبع قابل دسترسی باشد اما ساختمان v نباشد.

ورودی

- خط اول: عدد طبیعی (n تعداد ساختمان‌ها)
- n خط بعدی: ماتریس مجاورت $n * n$ ظرفیت‌ها.
- خط بعدی: شماره ساختمان **منبع**. (s)
- خط آخر: شماره ساختمان **مقصد**. (t)

خروجی

- لیستی از یال‌های گلوگاه به صورت تاپل (u, v) که در یک لیست قرار دارند (خروجی باید دقیقاً مشابه نمونه باشد).

نمونه ورودی و خروجی

ورودی:

2

0 10

0 0

0

1

خروجی:

$[(0, 1)]$