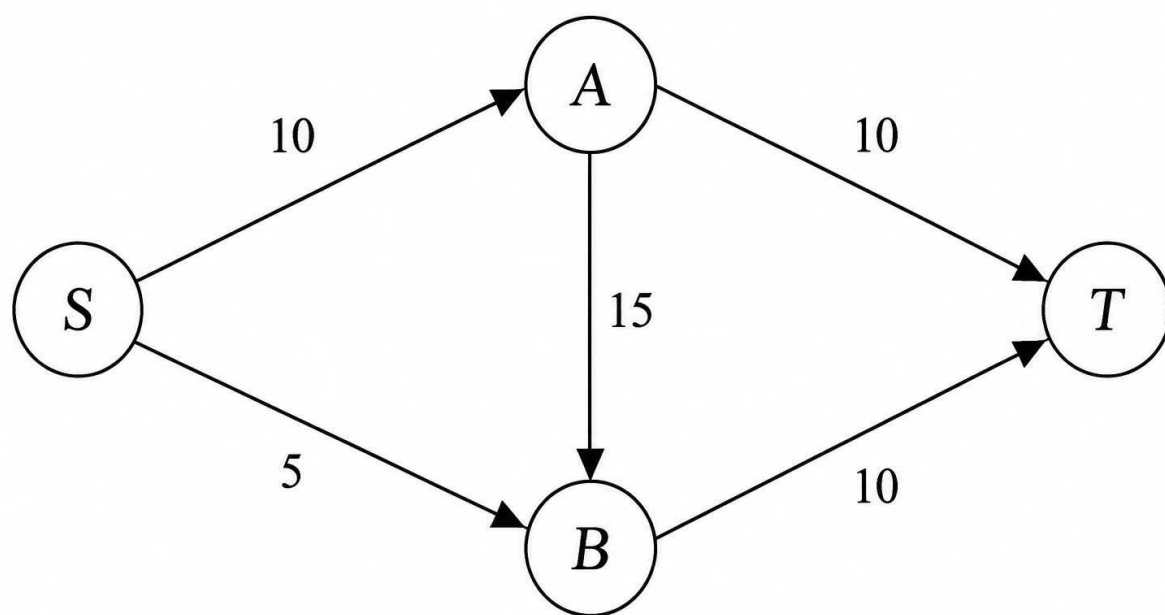


مثال اول

گراف:



هدف ما: پیدا کردن Maximum Flow از S به T

گام ۱: پیدا کردن اولین مسیر افزایشی

مسیر: $S \rightarrow A \rightarrow T$

ظرفیت‌های مسیر:

$$S \rightarrow A = 10$$

$$A \rightarrow T = 10$$

کمترین ظرفیت = ۱۰

پس ۱۰ رو عبور می‌دهیم

جریان فعلی = ۱۰

گام ۲: پیدا کردن مسیر جدید

مسیر:

$$S \rightarrow B \rightarrow T$$

ظرفیت‌ها:

$$S \rightarrow B = 5$$

$$B \rightarrow T = 10$$

کمترین ظرفیت = ۵

پس ۵ واحد رو اضافه می‌کنیم
جریان کل = ۱۵

گام ۳: بررسی مسیر دیگر
مسیر جدیدی از S به T وجود ندارد زیرا:
S → A پر شده
S → B پر شده
پس الگوریتم متوقف می‌شود

Maximum Flow = 15

دلیل:

جمع جریان‌های خروجی از مبدأ برابر است با:

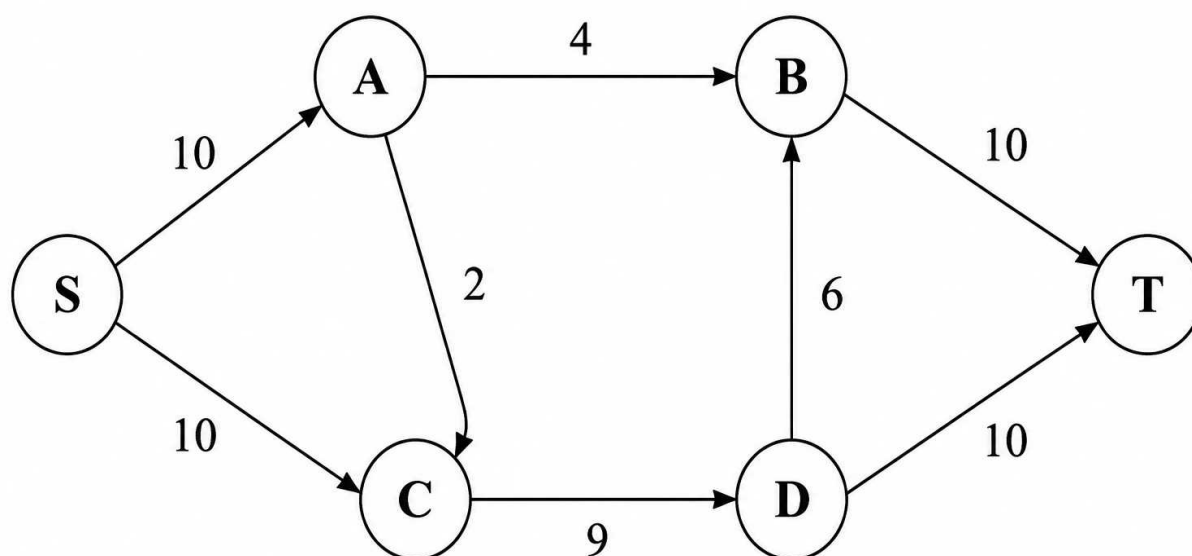
S → A = 10

S → B = 5

پس کل جریان = ۱۵

مثال دوم

گراف:



گام ۱: مسیر اول

S → A → B → T

ظرفیت‌ها:

۱۰, ۴, ۱۰

کمترین = ۴

جریان ارسال شده = ۴

جریان کل = ۴

گام ۲: مسیر دوم

S → C → D → T

ظرفیت‌ها:

۱۰, ۹, ۱۰

کمترین = ۹

جریان ارسال = ۹

جریان کل = ۱۳

گام ۳: مسیر سوم

$S \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

$S \rightarrow A$ باقی مانده ۶

$A \rightarrow C = 2$

$C \rightarrow D <<< (۹ \text{ استفاده شده})$

پس این مسیر ممکن نیست

مسیر دیگر:

$S \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۱, ۰, ۲, ۶

کمترین = ۱

جریان اضافه = ۱

جریان کل = ۱۴

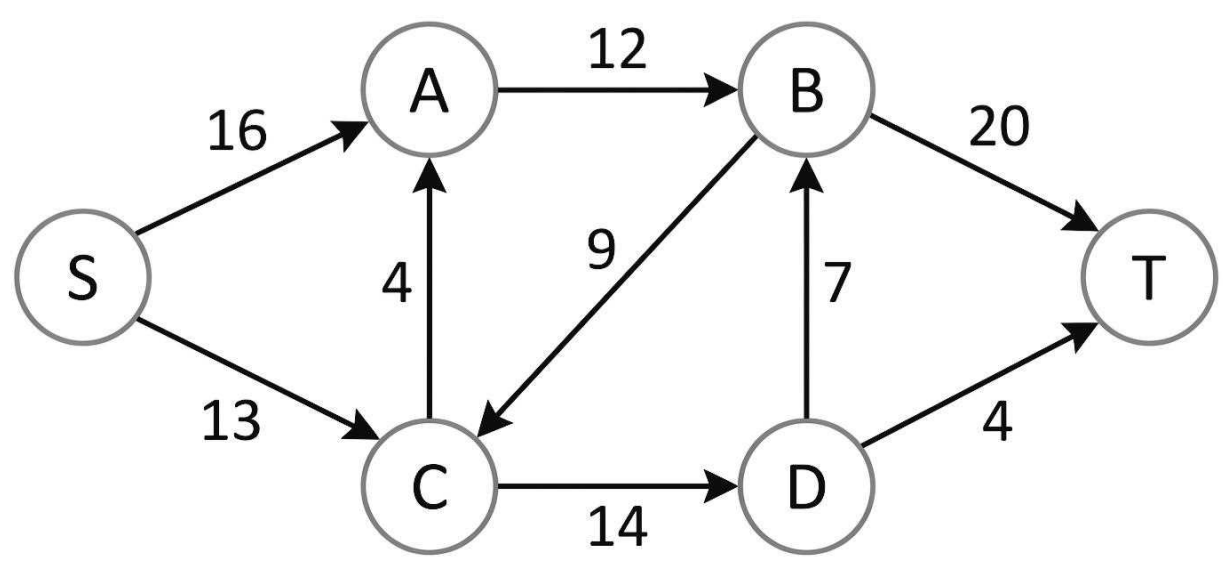
مسیر دیگری وجود ندارد

Maximum Flow = 14

دلیل:

هیچ مسیر افزایشی دیگری با ظرفیت مثبت باقی نمانده

مثال سوم
گراف:



گام ۱:

$S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۲۰ , ۱۲ , ۱۶

کمترین = ۱۲

Flow = 12

گام ۲:

$S \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۴ , ۱۴ , ۱۳

کمترین = ۴

Flow = 16

گام ۳:

$S \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۸ , ۷ , ۱۰ , ۹

کمترین = ۷

Flow = 23

اکنون مسیر افزایشی دیگری وجود ندارد

Maximum Flow = 23

دلیل:

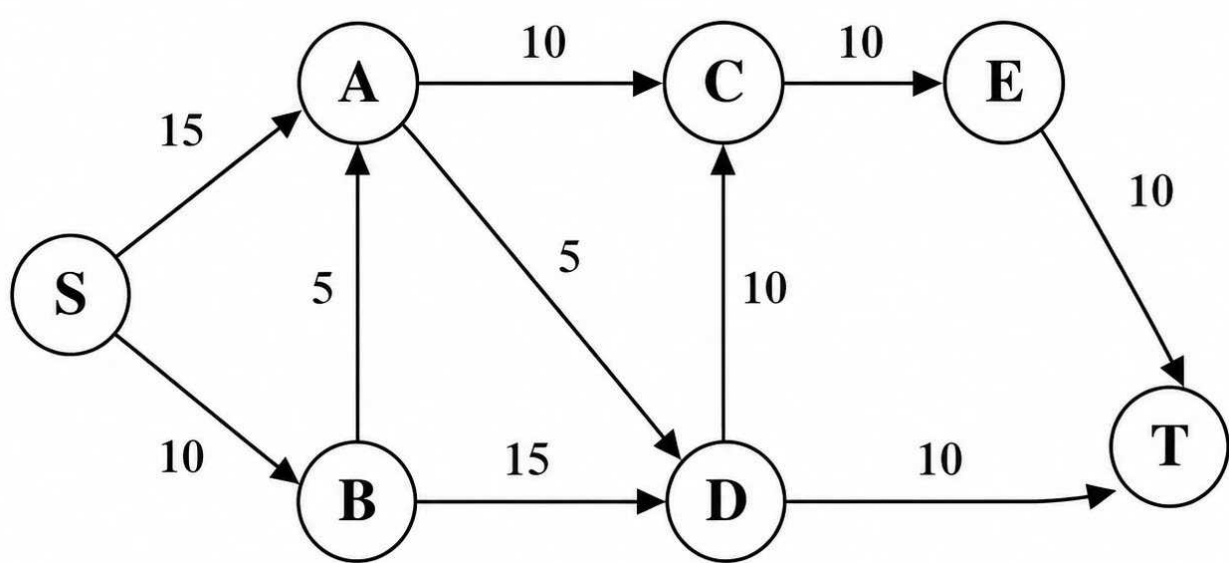
مجموع جریان وارد شده به T:

$B \rightarrow T = 19$

$D \rightarrow T = 4$

Maximum Flow = 23

مثال چهارم



گام ۱

$S \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۱۰ , ۱۰ , ۱۰ , ۱۰

min = 10

Flow = 10

گام ۲

$S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۱۰ , ۱۵ , ۱۰

min = 10

Flow = 20

گام ۳

$S \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۰ , ۰ , ۱۰ , ۵ , ۵

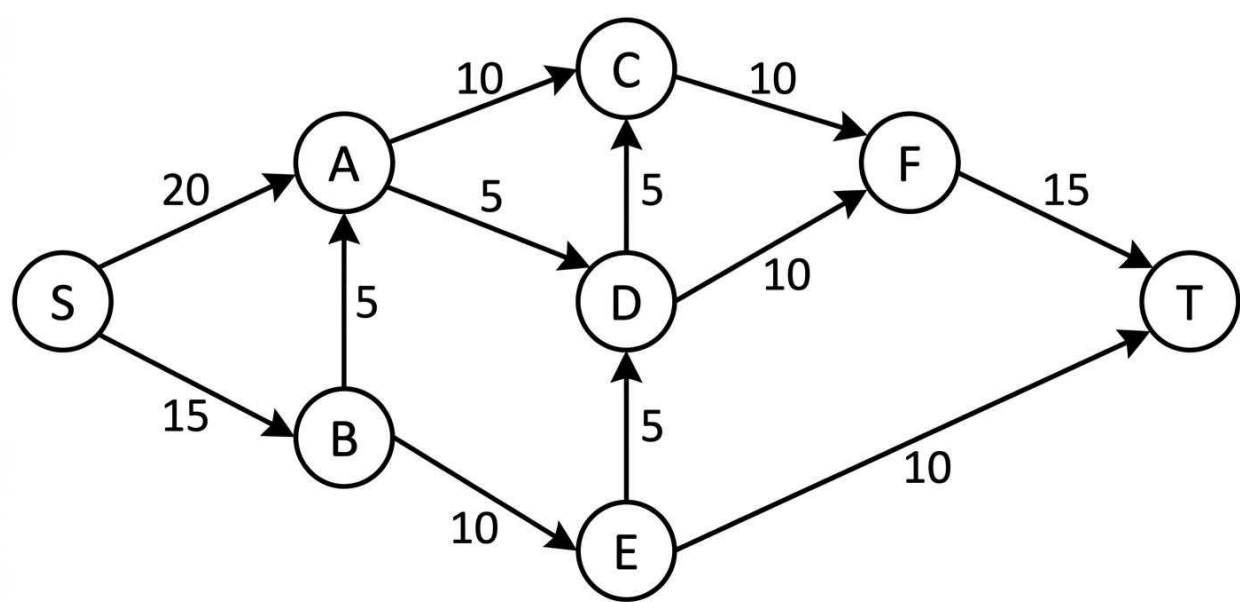
چون مسیر کامل نیست پس الگوریتم متوقف می‌شود

Maximum Flow = 20

دلیل:

تمام مسیرهای ممکن بررسی شده و هیچ مسیر با ظرفیت باقی‌مانده وجود ندارد

مثال پنجم



گام ۱

$S \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۱۵ , ۱۰ , ۱۰ , ۲۰

min = 10

Flow = 10

گام ۲

$S \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۱۰ , ۱۰ , ۱۵

min = 10

Flow = 20

گام ۳

$S \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۵ , ۵ , ۵ , ۰ , ۵

min = 5

Flow = 25

گام ۴

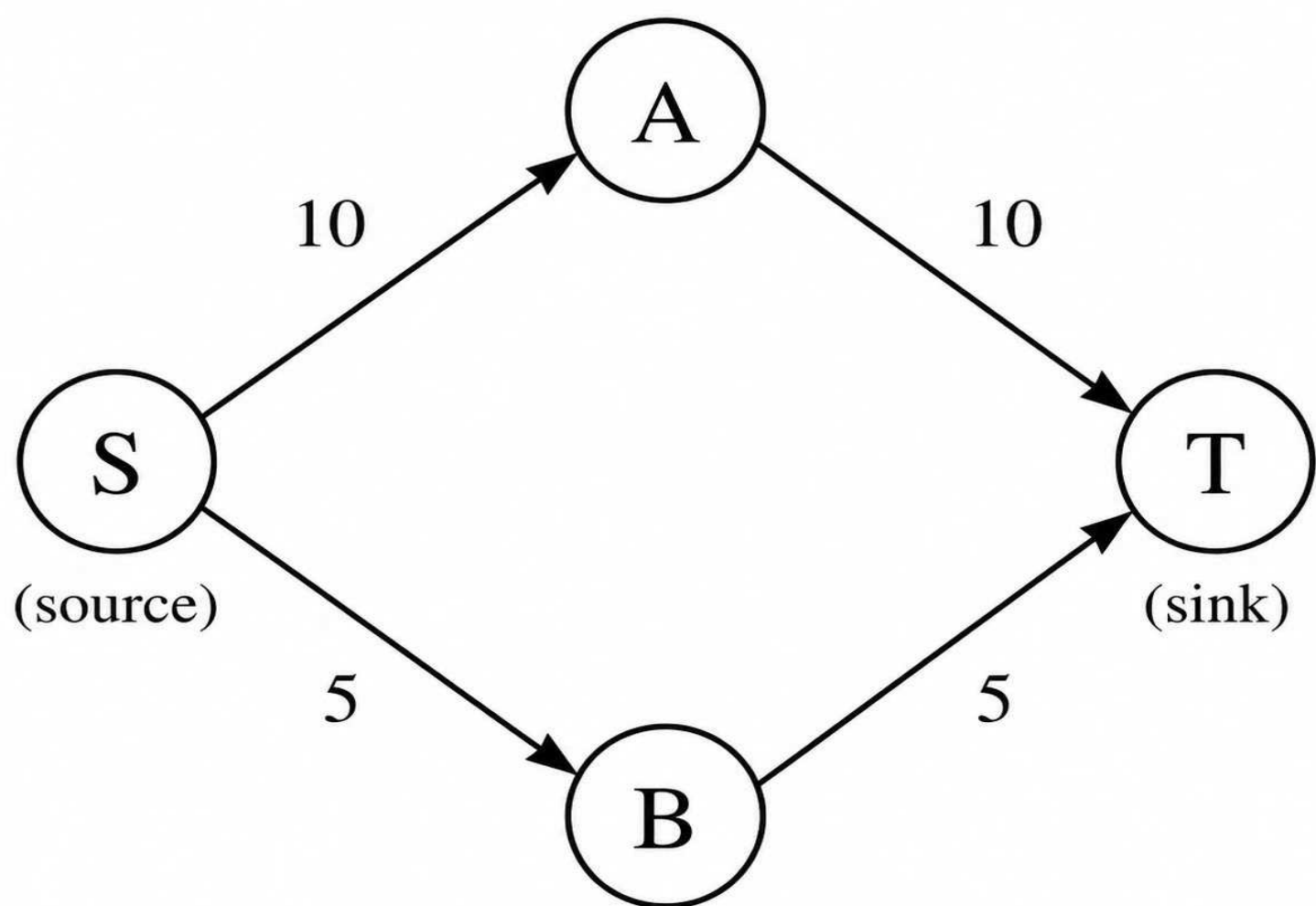
$S \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

۰ , ۵ , ۵ , ۱۰

مسیر ما کامل نیست پس الگوریتم متوقف می‌شود

Maximum Flow = 25



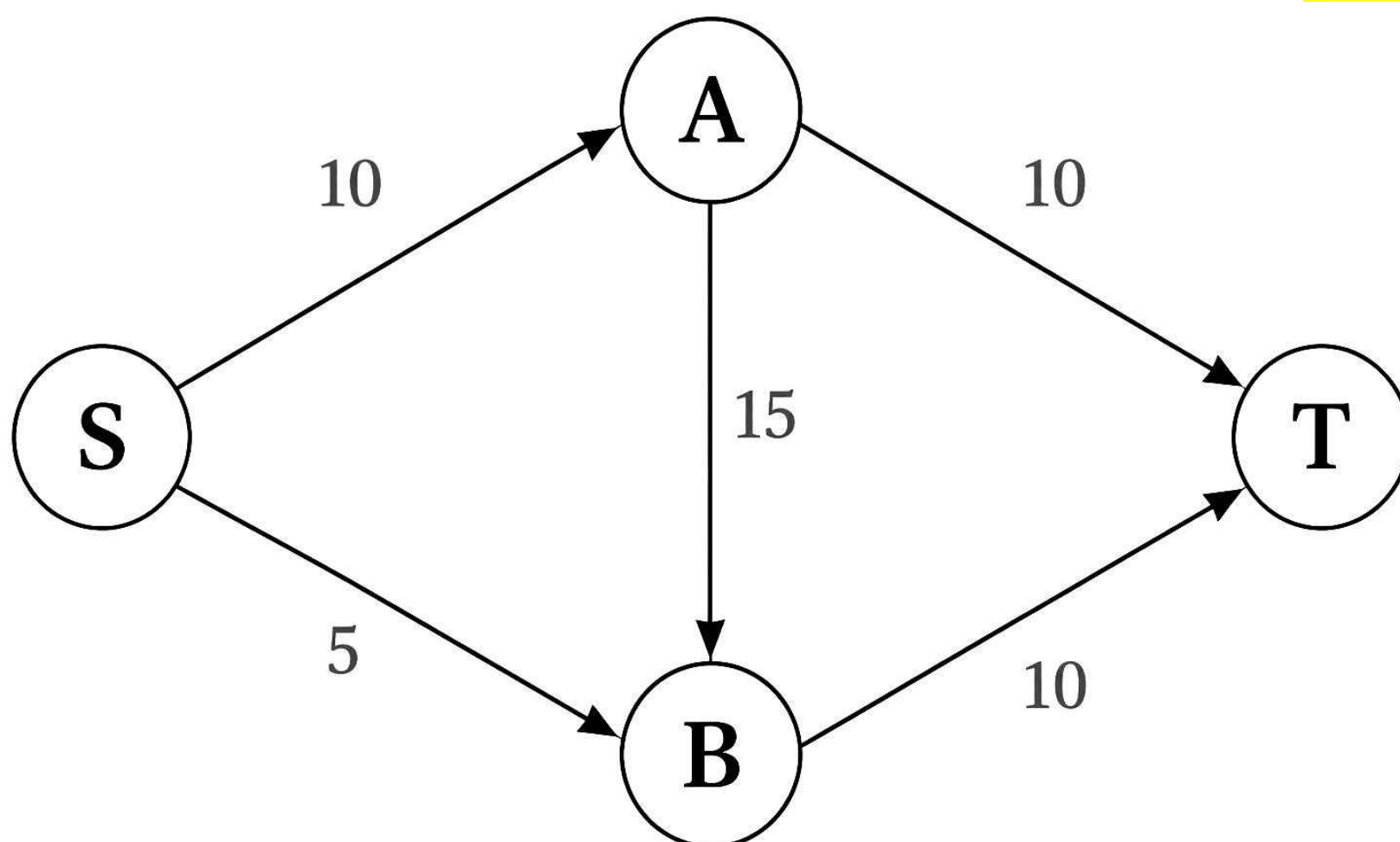
گام ۱: شناسایی مسیرهای ممکن
دو مسیر مستقل داریم:

$S \rightarrow A \rightarrow T$
 $S \rightarrow B \rightarrow T$

گام ۲: محاسبه ظرفیت هر مسیر
مسیر اول: $\min(10,10) = 10$
مسیر دوم: $\min(5,5) = 5$
گام ۳: جمع جریان‌ها
چون مسیرها مستقل هستند:
 $\text{Max Flow} = 10 + 5 = 15$
ماکسیمم شار = ۱۵
چرا؟

چون هیچ یالی مشترک بین مسیرها وجود ندارد
ظرفیت‌ها به‌طور کامل استفاده شده‌اند
هیچ مسیر افزایشی دیگری باقی نمی‌ماند

مثال هفتم



گام ۱: مسیرهای ممکن:

$S \rightarrow A \rightarrow T$
 $S \rightarrow B \rightarrow T$
 $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow T$

گام ۲: ارسال جریان (روش Ford-Fulkerson)

مسیر ۱:

$S \rightarrow A \rightarrow T$

$\min(10, 10) = 10$

ارسال ۱۰

ظرفیت باقی‌مانده:

$S \rightarrow A : 0$

$A \rightarrow T : 0$

مسیر ۲:

$S \rightarrow B \rightarrow T$

$\min(5, 10) = 5$

ارسال ۵

ظرفیت باقی‌مانده:

$S \rightarrow B : 0$

$B \rightarrow T : 5$

مسیر ۳: بررسی مسیر افزایشی

مسیر $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow T$ دیگر ممکن نیست چون:

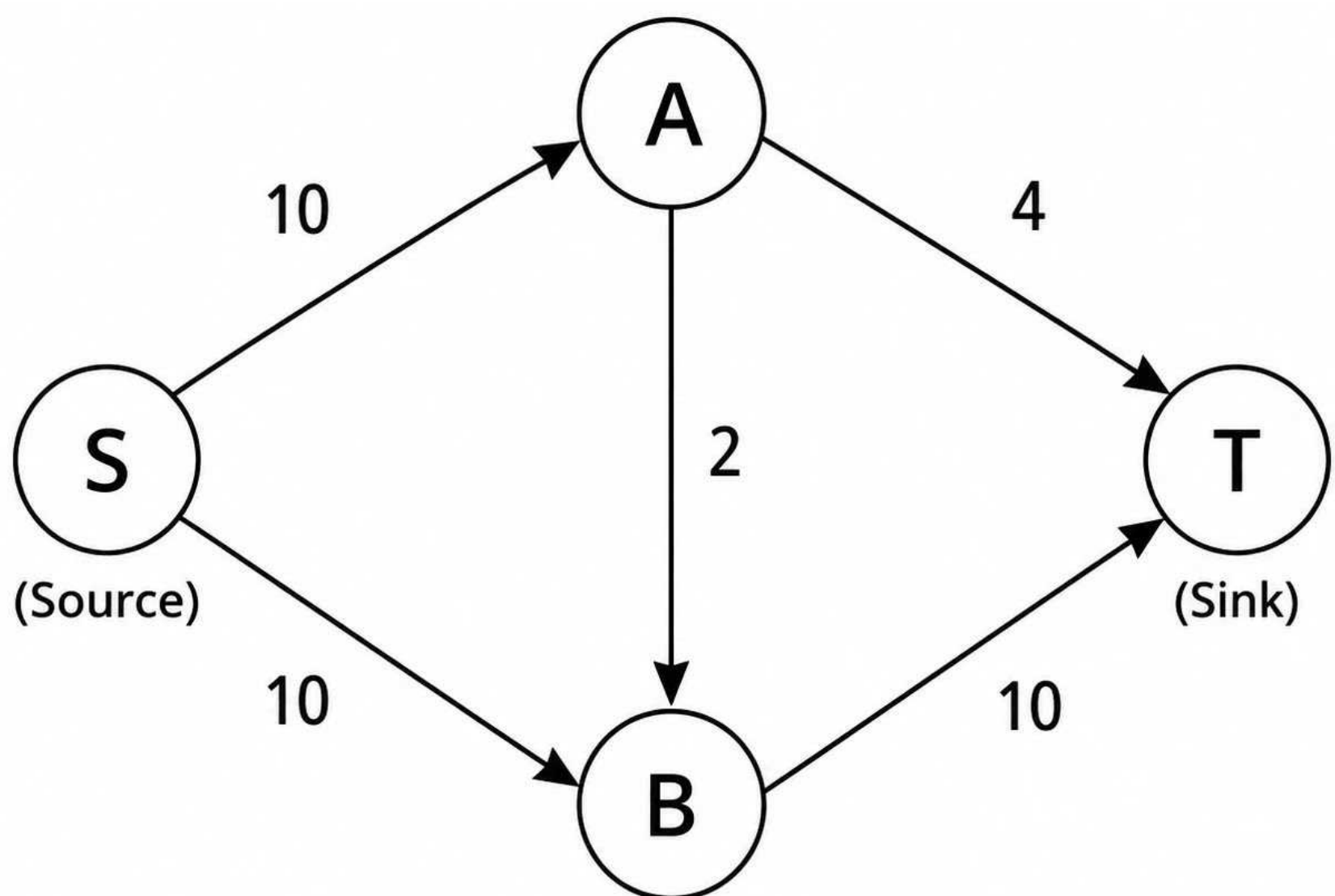
$S \rightarrow A$ ظرفیت ندارد

$\text{Max Flow} = 10 + 5 = 15$

چرا؟

چون تمام ظرفیت خروجی از S مصرف شده و هیچ مسیر افزایشی در گراف باقی نمانده

مثال هشتم



گام ۱: مسیرهای افزایشی

مسیر ۱:

$S \rightarrow A \rightarrow T$

$\min(10,4) = 4$

ارسال ۴

مسیر ۲:

$S \rightarrow B \rightarrow T$

$\min(10,10) = 10$

ارسال ۱۰

مسیر ۳:

$S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow T$

ظرفیت‌ها:

$S \rightarrow A : 6 -$

$A \rightarrow B : 2 -$

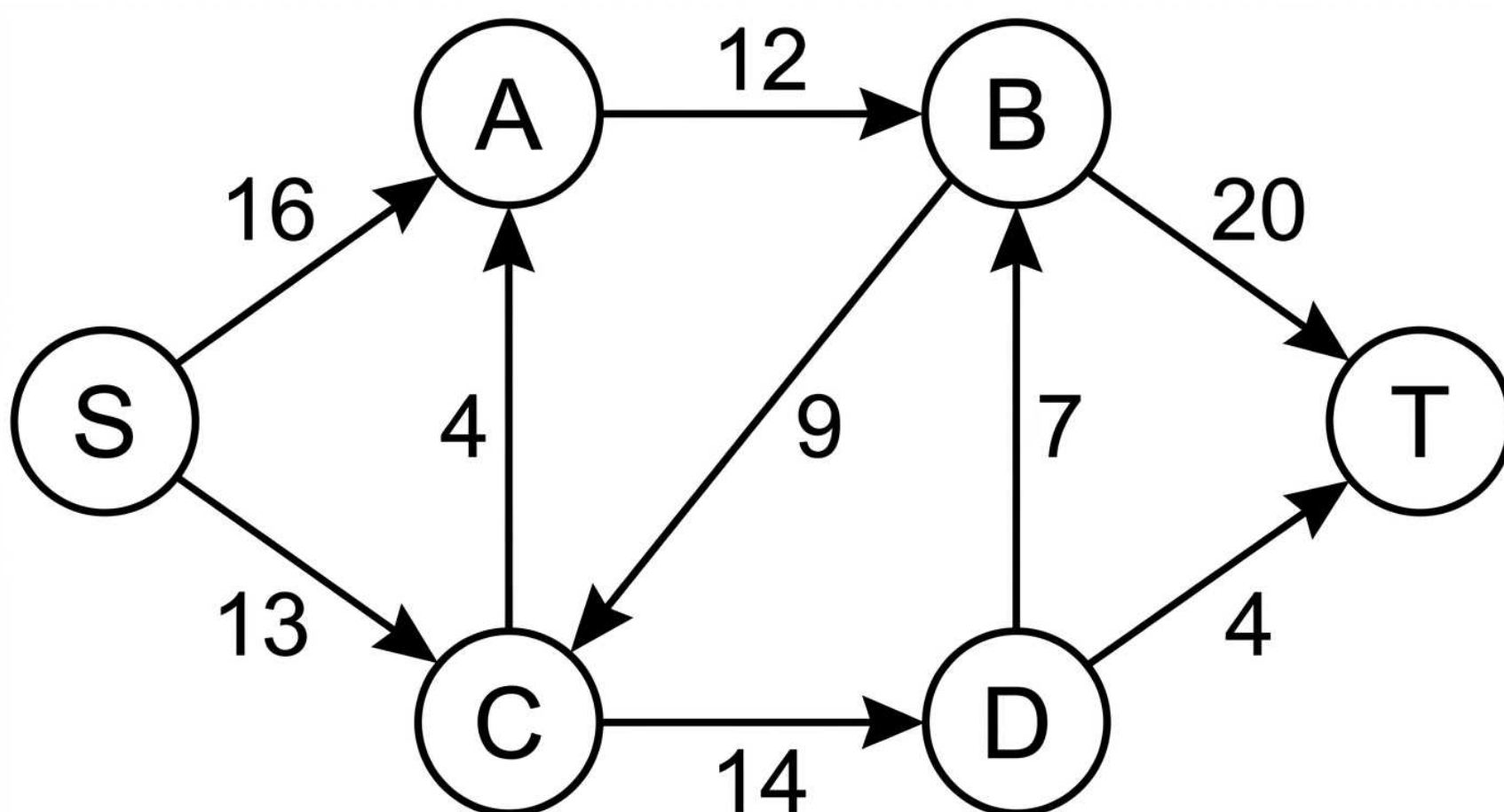
$B \rightarrow T : 0 -$ (مسدود)

پس مسیر نامعتبر است

$\text{Max Flow} = 4 + 10 = 14$

چرا جواب درسته ؟

چون یال $B \rightarrow T$ گلوگاه (Bottleneck) شده و حتی با وجود مسیر $A \rightarrow B$ ، خروجی به T ممکن نیست



گام‌های حل

$$S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow T = 12$$

$$S \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow T = 4$$

$$S \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow T = 7$$

$$\text{Max Flow} = 23$$

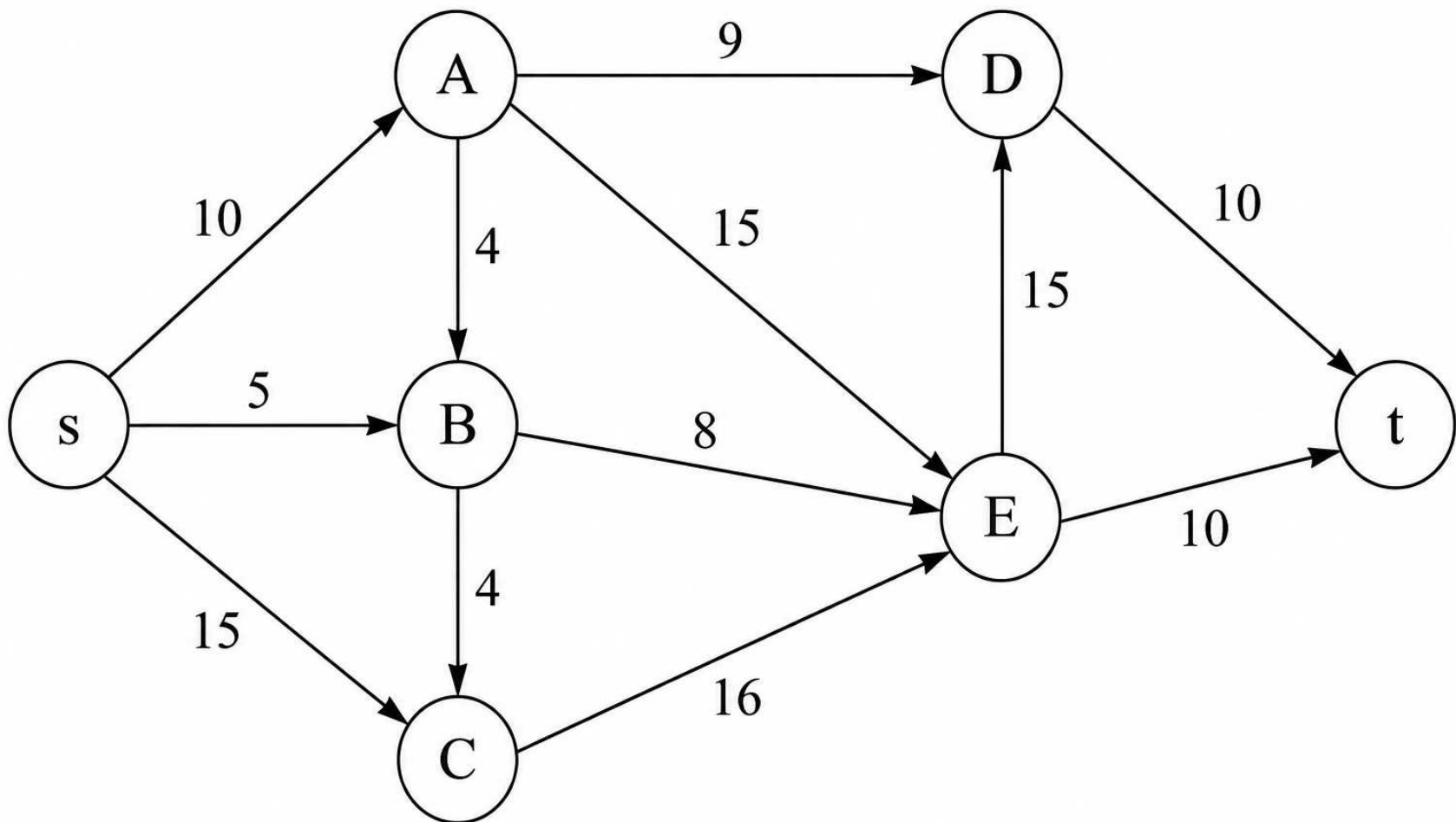
چرا جوابش درسته

تمام مسیرهای افزایشی بررسی شده

برش کمینه (Minimum Cut) برابر ۲۳ است

طبق قضیه Max-Flow Min-Cut، جواب قطعی است

مثال دهم



فرض کنید یک شبکه جریان با رأس‌های زیر داریم:

$$V = \{s, A, B, C, D, E, t\}$$

که در آن:

s مبدأ (Source)

t مقصد (Sink)

هدف ما:

پیدا کردن بیشترین مقدار جریان ممکن از رأس s به رأس t

مرحله اول: یافتن مسیر افزایشی

مسیر انتخابی:

$$s \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow t$$

ظرفیت‌های مسیر:

$$sA = 10$$

$$AD = 9$$

$$Dt = 10$$

حداقل ظرفیت در این مسیر:

$$\min(10, 9, 10) = 9$$

پس ۹ واحد جریان از این مسیر عبور می‌کند

جریان کل تا این مرحله:

$$F = 9$$

مرحله دوم: مسیر افزایشی دوم

مسیر:

$$s \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow t$$

ظرفیت‌ها:

$$sB = 5$$

$$BE = 8$$

$$Et = 10$$

حداقل ظرفیت مسیر:

$$\min(5, 8, 10) = 5$$

جریان کل:

$$F = 9 + 5 = 14$$

مرحله سوم: مسیر افزایشی سوم

مسیر:

$$s \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow t$$

ظرفیت‌ها:

$$sC = 15$$

$$CE = 16$$

$$Et = 5 \quad (\text{زیرا قبلاً ۵ واحد استفاده شده است})$$

حداقل ظرفیت مسیر:

$$\min(15, 16, 5) = 5$$

جریان کل:

$$F = 14 + 5 = 19$$

مرحله چهارم: مسیر افزایشی چهارم

مسیر:

$$s \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow t$$

ظرفیت‌ها:

$$sC = 10$$

$$CE = 11$$

$$ED = 15$$

$$Dt = 1$$

حداقل ظرفیت مسیر:

$$\min(10, 11, 15, 1) = 1$$

جریان کل:

$$F = 19 + 1 = 20$$

نتیجه نهایی

از این مرحله دیگر مسیر افزایشی جدیدی از s به t وجود ندارد

بنابراین بیشترین جریان ممکن در شبکه برابر است با:

$$\text{Maximum Flow} = 20$$

دلیل درستی؟

مجموع ظرفیت یال‌های ورودی به رأس t برابر است با:

$$D \rightarrow t = 10$$

$$E \rightarrow t = 10$$

بنابراین حداکثر جریانی که می‌تواند به t برسد:

$$20 = 10 + 10$$

پس حتی اگر مسیرهای دیگر ظرفیت بیشتری داشته باشند بیش از ۲۰ واحد جریان نمی‌تواند به مقصد برسد

در نتیجه مقدار به دست آمده:

$$\text{Maximum Flow} = 20$$

بیشترین جریان ممکن در این شبکه است

دلیل:

با بررسی گراف باقیمانده مشخص می‌شود که هیچ مسیر افزایشی دیگری از S به T وجود ندارد

یک راهنما برای حل مسائل Maximum Flow

مرحله ۱: گراف جهت‌دار را رسم کنیم و ظرفیت هر یال را مشخص کنیم

مرحله ۲: یک مسیر از Source به Sink پیدا کنید که ظرفیت مثبت داشته باشد که به این مسیر

Augmenting Path می‌گویند

مرحله ۳: کمترین ظرفیت در طول مسیر را پیدا کنید که به آن Bottleneck می‌گویند

مرحله ۴: به اندازه Bottleneck جریان ارسال می‌کنیم

مرحله ۵: گراف باقیمانده (Residual Graph) را به‌روزرسانی می‌کنیم

مرحله ۶: دوباره مسیر افزایشی رو پیدا کنیم

مرحله ۷: اگر دیگر هیچ مسیر افزایشی وجود نداشت، مجموع جریان‌ها برابر Maximum Flow هست